

LABORATORIUM ELEKTROAKUSTYKI

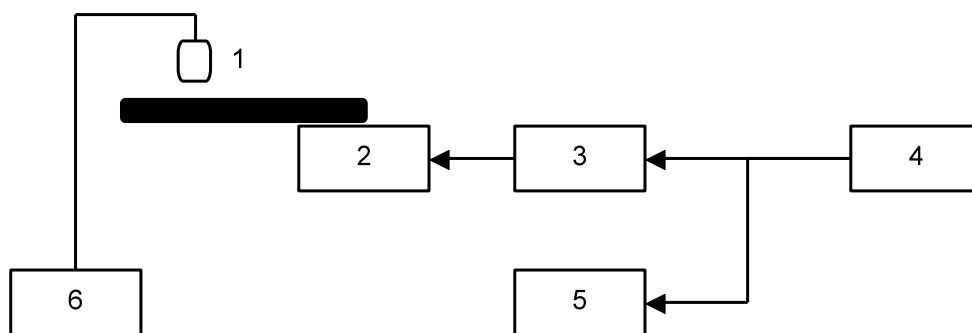
ĆWICZENIE NR 1 Drgania układów mechanicznych

Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z właściwościami układów drgających oraz metodami pomiaru i analizy drgań. W ramach ćwiczenia zostaną wykonane pomiary parametrów opisujących drgania poprzeczne prętów zaciśniętych na jednym końcu i swobodnych na drugim.

Drgania układów ciągłych

1. Układ pomiarowy



1 - badany układ drgający, 2 - wzbudnica drgań, 3 - wzmacniacz mocy, 4 - generator, 5 - częstotściomierz, 6 - stroboskop.

2. Zadania laboratoryjne

- 2.1. Zmierzyć częstotliwości poprzecznych drgań własnych (modów) belek o różnych długościach i przekrojach poprzecznych, wykonanych z różnych materiałów.
- 2.2. Wyznaczyć trzy pierwsze sposoby (mody) drgań poprzecznych belek.
- 2.3. Otrzymane wyniki zamieścić w tabeli wg wzoru (tabela 3) i porównać z wynikami teoretycznymi korzystając z zależności podanych w Dodatku A i danych materiałowych podanych w tabelach 1 i 2.

3. Zagadnienia do przygotowania

- 3.1. Drgania strun, prętów, belek i płyt.
- 3.2. Częstotliwości drgań własnych (modów).

Literatura

- [1] Dobrucki A., Podstawy akustyki. Skrypt PWr., Wrocław 1987.
- [2] Januszajtis A., Fizyka dla Politechnik, Tom III Fale, §5. PWN W-wa 1991.
- [3] Żyszkowski Z., Podstawy elektroakustyki, wyd.3. WNT W-wa 1984, rozdz. 6.

Tabela 1. Dane materiałowe

| Materiał | Współczynnik sprężystości podłużnej (moduł Younga) E [N/m ²] | Gęstość ρ [kg/m ³] | Prędkość fali podłużnej (dźwięku) $c_L = \sqrt{E/\rho}$ [m/s] |
|--------------|---|--|--|
| Stal | $2,2 \cdot 10^{11}$ | 7800 | 5900 |
| Mosiądz | $1,0 \cdot 10^{11}$ | 8600 | 3830 |
| Duraluminium | $0,7 \cdot 10^{11}$ | 2700 | 5982 |
| Plexiglas | $4,45 \cdot 10^9$ | 1180 | 2670 |

Tabela 2. Momenty bezwładności przekrojów o różnych kształtach

| Kształt przekroju porzecznego | Prostokątny (a x b) | Kołowy (r) | Trójkąt równoboczny (a) |
|---|---------------------|-------------|---------------------------|
| Moment bezwładności przekroju [m ⁴] | $a^3b/12$ | $\pi r^4/4$ | $\frac{\sqrt{3}}{96} a^4$ |

Tabela 3. Wyniki pomiarów i obliczeń.

| Materiał | Parametry geometryczne | n | $f_{n, zm.}$ (Hz) | $f_{n, obl.}$ (Hz) | δ_f (%) | m | $x_{nm, zm.}$ (mm) | $x_{nm, obl.}$ (mm) | δ_x (%) | | |
|----------|--|-----|--|-----------------------|-------------------|-----|-----------------------|------------------------|-------------------|--|--|
| | $l =$ $a =$ $b =$ $r =$ $S =$ $I =$ | 1 | | | | | | | | | |
| | | 2 | | | | 1 | | | | | |
| | | 3 | | | | 1 | | | | | |
| | | | | | | 2 | | | | | |
| | | | $l =$ $a =$ $b =$ $r =$ $S =$ $I =$ | 1 | | | | | | | |
| | | | | 2 | | | | 1 | | | |
| 3 | | | | | | 1 | | | | | |
| | | | | | | 2 | | | | | |
| | $l =$ $a =$ $b =$ $r =$ $S =$ $I =$ | | | 1 | | | | | | | |
| | | | | 2 | | | | 1 | | | |
| | | 3 | | | | 1 | | | | | |
| | | | | | | 2 | | | | | |

Uwaga: $\delta_f = (f_{n, zm.} - f_{n, obl.}) / f_{n, obl.} \times 100 \%$; $\delta_x = (x_{n, zm.} - x_{n, obl.}) / x_{n, obl.} \times 100 \%$;

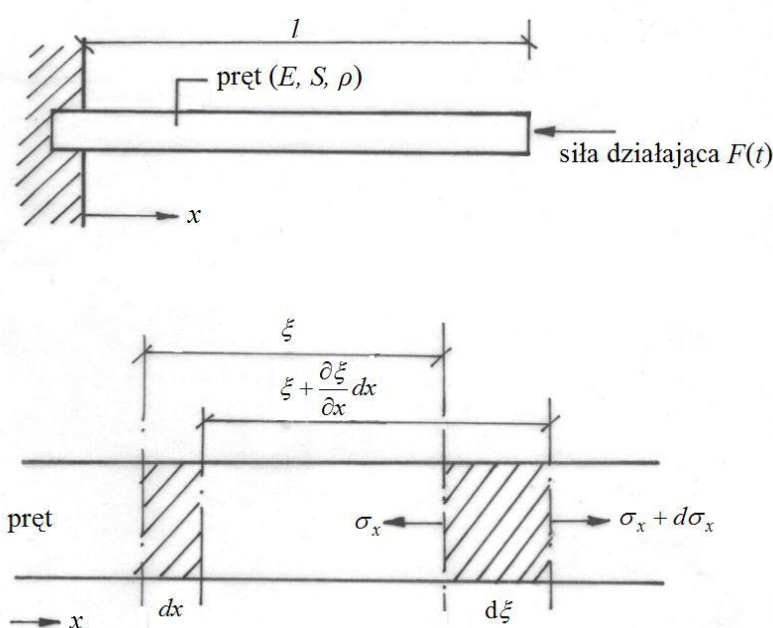
l – długość [m]; a – grubość [m]; b – szerokość [m]; r – promień [m]; S – pole powierzchni przekroju [m²]; I – moment bezwładności przekroju [m⁴]; n – numer modu drgań; m – numer węzła drgań.

Dodatek A

DRGANIA PRĘTÓW

- Rozważamy pręt o jednostajnym przekroju poprzecznym S [m²], wykonany z materiału o gęstości ρ [kg/m³] i współczynnika sprężystości podłużnej materiału (moduł Younga) E [N/m²].
- W przeciwieństwie do strun nie uwzględnia się zupełnie naciągu. Przyjmuje się, że całkowita siła zwracająca pręt do położenia równowagi pochodzi jedynie od jego sprężystości własnej.
- Pręt może drgać podłużnie, poprzecznie i skrętnie (wirowo).

I. DRGANIA PODŁUŻNE PRĘTÓW



Rys. 2. Drgania podłużne pręta.

Pod wpływem działającej siły F [N] odległość ξ między dwoma dowolnymi przekrojami wzrosła o $d\xi = \frac{\partial \xi}{\partial x} dx$, zatem względne wydłużenie pręta w tym obszarze wynosi

$\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x}$ i zgodnie z prawem Hooke'a jest proporcjonalna do naprężenia σ_x :

$$\varepsilon = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{1}{E} \frac{F}{S}, \quad \rightarrow F = \varepsilon ES.$$

Siła działająca na prawy przekrój jest

$$F + \frac{\partial F}{\partial x} dx = F + ES \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx,$$

czyli, że wypadkowa siła działająca na odcinek pręta $d\xi$ wynosi:

$$dF = ES \frac{\partial^2 x}{\partial x^2} dx .$$

Jest to siła sprężystości. Pod wpływem tej siły masa odcinka pręta dx równa $dm = S\rho dx$, doznaje przyspieszenia $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$. Zatem na podstawie II prawa Newton'a otrzymujemy równanie:

$$(I.1) \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c_L^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} ,$$

w którym $c_L = \sqrt{E/\rho}$ [m/s] jest prędkością fali podłużnej (dźwięku) w pręcie.

Jest to równanie falowe, jednowymiarowe (fali dźwiękowej w pręcie). Spełnia je dowolna funkcja typu $\xi(x \pm ct)$.

Dla wyznaczenia drgań własnych pręta postępuje się podobnie jak dla struny, tj. metodą rozdzielania zmiennych. Poszukuje się rozwiązania równania (I.1) w postaci iloczynu dwóch funkcji, z których jedna zależy tylko od x , a druga tylko od t

$$\xi(x, t) = X(x)T(t) .$$

Ostatecznie, rozwiązanie równania falowego ma postać:

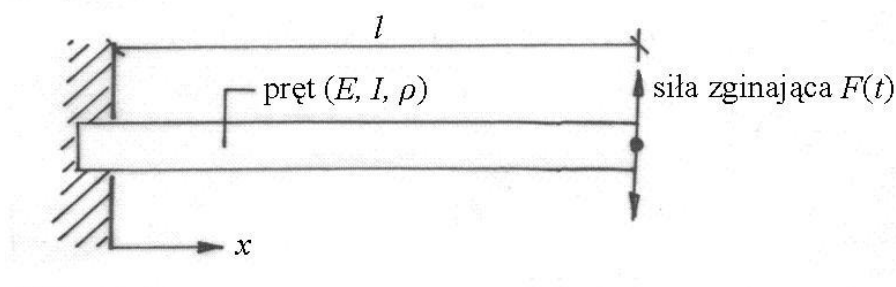
$$(I.2) \quad \xi(x, t) = \sum_n (C_{1n} \cos \omega_n t + C_{2n} \sin \omega_n t) \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

gdzie stałe C_{1n} , C_{2n} wyznacza się z warunków początkowych, natomiast częstotści drgań własnych (modów) są równe:

$$(I.3) \quad \omega_n = \frac{n\pi}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad [\text{rad/s}].$$

Należy zauważyć, że częstotści podłużnych drgań własnych pręta są, podobnie jak struny, harmoniczne w stosunku do częstotści podstawowej ω_1 ($n = 1$).

II. DRGANIA POPRZECZNE PRĘTÓW



Rys. 2. Drgania poprzeczne pręta.

Drgania poprzeczne pręta o stałym przekroju S i gęstości ρ wzdłuż długości l opisuje równanie różniczkowe:

$$(II.1) \quad \rho S \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) = 0,$$

gdzie wyrażenie w nawiasie jest momentem zginającym, natomiast I jest momentem bezwładności przekroju poprzecznego pręta

$$I = \int_S z^2 dS.$$

Równanie (II.1) nie jest równaniem falowym. Jeżeli podstawimy do (II.1) rozwiązanie falowe np. w postaci $z(x, t) = Z \exp(j(\omega t - kx))$, to otrzymamy związek dyspersyjny (dyspersja - zjawisko w którym prędkość fali zależy od częstotliwości):

$$\omega = k^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho S}},$$

przy czym $k = 2\pi/\lambda$ jest liczbą falową, λ długością fali poprzecznej. Z zależności tej wynika, że prędkość przemieszczania się powierzchni stałej fazy, czyli prędkość fazowa drgań poprzecznych, jest równa:

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\omega c_L \sqrt{\frac{I}{S}}} \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} \infty.$$

Ze względów fizycznych jest to niemożliwe, zatem równanie (II.1) nie jest ściśle. Jednak dla małych częstotliwości, dla których długość fali poprzecznej λ jest znacznie większa od wymiarów liniowych przekroju poprzecznego pręta ($a/\lambda < 0.1$), równanie (II.1) jest wystarczająco dokładne dla zastosowań technicznych.

Podstawiając do równania (II.1): $z(x, t) = Z(x) \exp(j\omega t)$, otrzymamy:

$$(II.2) \quad \frac{d^4 Z(x)}{dx^4} - \mu^4 Z(x) = 0, \quad \mu^4 = \omega^2 \frac{\rho S}{EI}.$$

Ogólne rozwiązanie równania (II.2) można przedstawić w postaci:

$$(II.3) \quad \begin{aligned} Z(x) &= A_1 e^{\mu x} + A_2 e^{-\mu x} + A_3 e^{j\mu x} + A_4 e^{-j\mu x} = \\ &= B_1 \cosh \mu x + B_2 \sinh \mu x + B_3 \cos \mu x + B_4 \sin \mu x. \end{aligned}$$

Rozwiązanie (II.3) zawiera cztery stałe do wyznaczenia których potrzebne są cztery warunki brzegowe, po dwa na każdy koniec pręta.

II.1. Pręt zaciśnięty na jednym końcu i swobodny na drugim

Dla $x = 0$ wychylenie i nachylenie pręta muszą być równe zero:

$$Z(0) = 0 \quad \text{i} \quad \left. \frac{dZ(x)}{dx} \right|_{x=0} = 0.$$

Stąd $B_1 = -B_3$ oraz $B_2 = -B_4$.

Dla $x = l$ moment zginający i siła ścinająca na swobodnym końcu pręta muszą być równe zero:

$$\left. \frac{d^2 Z(x)}{dx^2} \right|_{x=l} = 0 \quad \text{i} \quad \left. \frac{d^3 Z(x)}{dx^3} \right|_{x=l} = 0.$$

Stąd

$$B_2 = B_1 \frac{\sin \mu l - \sinh \mu l}{\cos \mu l + \cosh \mu l} = -B_1 \frac{\cos \mu l + \cosh \mu l}{\sin \mu l + \sinh \mu l},$$

przy czym

$$\begin{aligned} (\cos \mu l + \cosh \mu l)^2 &= \sinh^2 \mu l - \sin^2 \mu l, \\ \cosh \mu l \cos \mu l &= -1. \end{aligned}$$

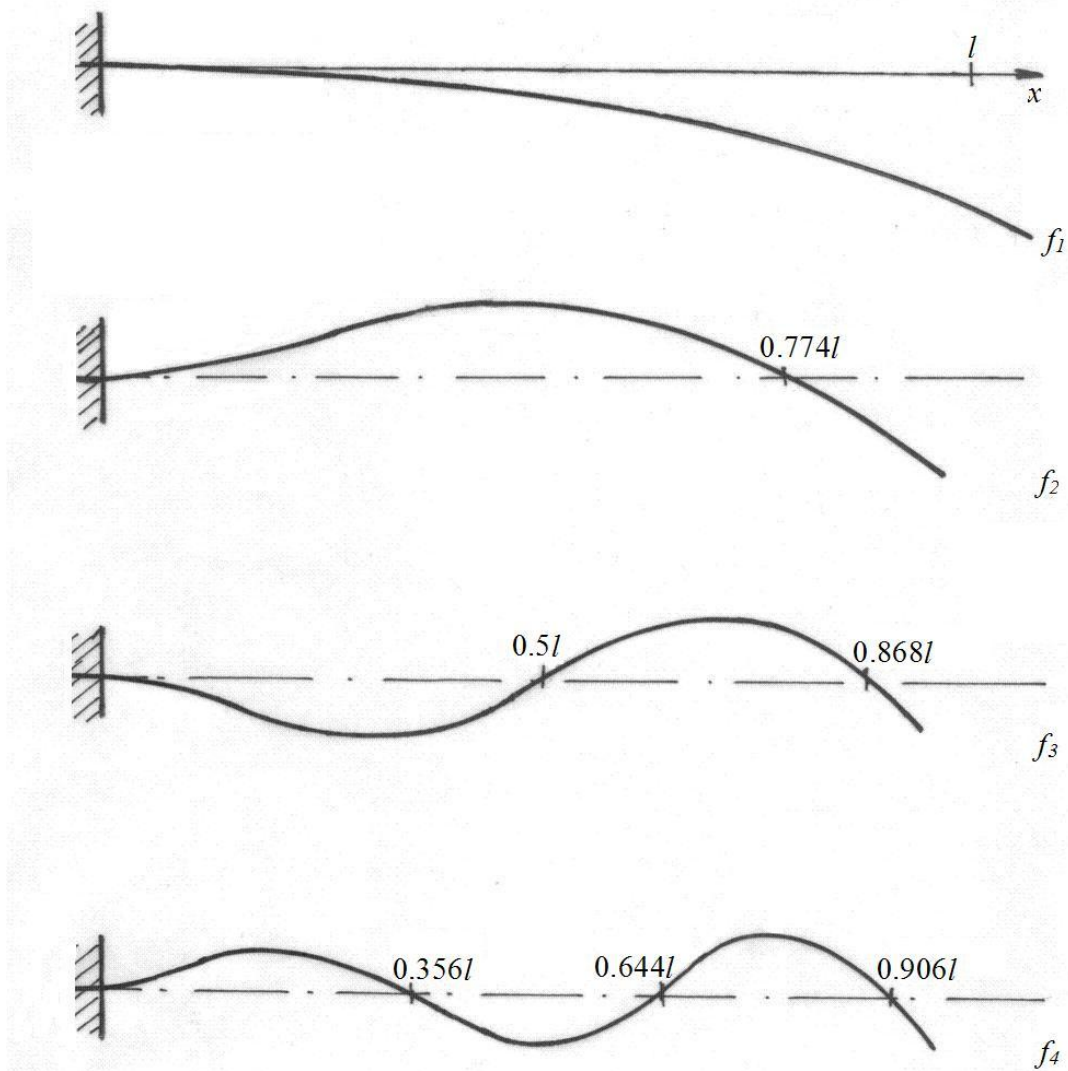
Wartości własne ostatniego równania wynoszą:

$$\begin{cases} \mu_1 l = 1.8751, \\ \mu_2 l = 4.6946, \\ \mu_3 l = 7.8548, \\ \mu_4 l = 10.9957, \dots \end{cases}$$

Dla tych wartości $\mu_n, n=1, 2, \dots$, otrzymuje się ze wzoru (II.2) częstotliwości poprzecznych drgań własnych pręta:

$$(II.4) \quad \omega_n^2 = \mu_n^4 \frac{EI}{\rho S}.$$

Na rysunku 3 pokazano cztery pierwsze mody drgań poprzecznych pręta zaciśniętego na jednym końcu.



Rys. 3. Cztery pierwsze sposoby (mody) drgań poprzecznych pręta zaciśniętego na jednym końcu o częstotliwościach:

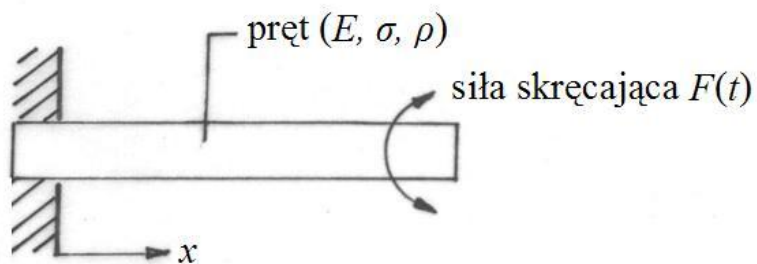
$$f_1 = \frac{0.5596}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}, [\text{Hz}]$$

$$f_2 = 6.268 f_1,$$

$$f_3 = 17.548 f_1,$$

$$f_4 = 34.387 f_1.$$

III. DRGANIA SKRĘTNE PRĘTÓW



Rys. 4. Drgania skrętne pręta.

Gdy pręt jest pobudzany momentem skręcającym powstają drgania skrętne (wirowe). Pręt przenoszący momenty skręcające nazywany jest wałem.

Częstotliwość podstawowa drgań własnych skrętnych jest określona wzorem:

$$(III.1) \quad f_1 = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\sigma)}}, \text{ [Hz]},$$

gdzie σ jest liczbą Poissona.

Częstotliwości drgań wyższych modów są harmoniczne w stosunku do częstotliwości podstawowej f_1 .