

**MATERIAŁY POMOCNICZE DO WYKŁADU  
Z PODSTAW ZASTOSOWAŃ ULTRADŹWIĘKÓW W MEDYCYNIE**  
(wyłącznie do celów dydaktycznych – zakaz rozpowszechniania)

**2. Prędkość propagacji i tłumienie fal ultradźwiękowych w ośrodkach biologicznych. Ukośne i prostopadłe padanie fal ultradźwiękowych na granice ośrodków.**

\*\*\*\*\*

**S2-S5. Prędkość propagacji fali ultradźwiękowej**

prędkość fazowa      prędkość grupowa      ogólnie, prędkość dla każdego ośrodka

$$c = c_f = \frac{\omega}{k} \quad c_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = c_f - \lambda \frac{dc_f}{d\lambda} \quad c = \sqrt{\frac{1}{\rho \cdot C_o}}$$

Ciecze	Ciała stałe	Gazy
$c = \sqrt{\frac{1}{\rho \cdot \beta_a}}$	$c_L = \sqrt{\frac{K + \frac{4G}{3}}{\rho}} = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1-2\nu)(1+\nu)}}$	$c = \sqrt{\frac{P \cdot \kappa}{\rho}}$
	$c_T = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}}$	

$K = E/(3(1-2\nu))$  [Pa] – współczynnik sprężystości objętościowej (moduł ściśliwości);  
 $K = -Vdp/dV$

$E = 2G(1+\nu)$  [Pa] - moduł Younga;  
 $E = \sigma/\varepsilon$  (względne odkształcenie liniowe materiału od naprężenia);

$G$  [Pa] - moduł Kirchhoffa;  $G = \tau/\gamma$  (odkształcenie postaciowe do naprężenia);

$\nu$  – bezwymiarowy współczynnik Poissona;  
 $\nu = -\varepsilon_n/\varepsilon_m$  (odkształcenie poprzeczne do podłużnego przy osiowym stanie naprężenia);

=====

**S6. Fale poprzeczne w tkankach (TW – transversal wave)**

Tkanka	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$c_L$ [m/s]	$c_T$ [m/s]
tłuszcz	937	1479	51.8
mięsień	1070	1532	48.5
kość	1780	3380	1940

$f = 1$  MHz,  $t = 37$  °C

---

### S7-S9. Prędkość dźwięku fali podłużnej dla różnych rodzajów ośrodków biologicznych ciała ludzkiego, wybranych ciał stałych, cieczy i gazów

średnia prędkość w tkance miękkiej 1540 m/s, gęstość 1058 kg/m<sup>3</sup>;  
tkanka bez tłuszczu 1575 m/s, z tłuszczem 1465 m/s;

kość gąbczasta 2700 m/s fast, 1400 m/s slow; gęstość 1140 kg/m<sup>3</sup>;  
kość zbita 4040 m/s, gęstość 1900 kg/m<sup>3</sup>;

powietrze:  $c = 353$  m/s; gęstość 1.138 kg/m<sup>3</sup>;  
woda 1524 m/s, gęstość 993 kg/m<sup>3</sup> w temperaturze 37 °C

---

### S10. Zmiany prędkości dźwięku z temperaturą w wodzie morskiej

Wzór Claya i Edwina ( $P = 1$  atm na powierzchni):

$$c_{sw} = 1449.2 + 4.6 \cdot t - 5.5 \cdot 10^{-2} \cdot t^2 + 0.29 \cdot 10^{-3} \cdot t^3 + (1.34 - 0.01 \cdot t) \cdot (0.1 \cdot s - 35) + 0.016d$$

$$\Delta c / \Delta t \approx 4.6 \text{ (m/s)/}^\circ\text{C}; \quad \Delta c / \Delta s \approx 0.134 \text{ (m/s)/}\%; \quad \Delta c / \Delta d \approx 0.016 \text{ (m/s)/m}$$

---

### S11. Dyspersja prędkości dźwięku (wartości)

#### Małe zmiany:

- roztwory hemoglobiny: 0.165 (m/s)/MHz
- tkanka mózgu ludzkiego: 0.3 (m/s)/MHz
- wątroba szczura: 0.5 (m/s)/MHz
- mięsień sercowy szczura: 0.22 (m/s)/MHz

#### Duże zmiany:

- płuca z zaw. 60% powietrza: 138 (m/s)/MHz, (tj. od 644 m/s przy 1 MHz do 1472 m/s przy 7 MHz)
- tkanka kostna: 1 ÷ 12 % dla 1 ÷ 3 MHz

---

### S12-S.13. Prędkość dźwięku o dużym natężeniu

Dla silnych dźwięków (ultradźwięków) prędkość propagacji jest większa.

$$c = c_o + \Delta c_{NL} = c_o + \frac{B}{2A} \cdot v_a$$

$c = 1540$  m/s;  $\rho = 1058$  kg/m<sup>3</sup>;  $Z = 1.62 \cdot 10^6$  kg/(m<sup>2</sup>·s);  
wartość  $B/A = 10$  przyjęto dla tkanki tłuszczowej

Natężenie $I$ [W/cm <sup>2</sup> ]	Ciśnienie $p$ [kPa]	$\Delta c_{NL}$ [m/s]
0.001	6	0.02
0.01	18	0.06
0.1	56	0.17
1	178	0.55
10	563	1.74
100	1782	5.50

---



---

#### S14. Anizotropia prędkości dźwięku

Anizotropia prędkości dźwięku występuje w zależności od kierunku propagacji fali ultradźwiękowej.

---



---

#### S15-S16. Tłumienie fali ultradźwiękowej (podstawowe zależności)

$$\alpha = \frac{1}{2d} \cdot \ln\left(\frac{I_o}{I_d}\right) = \frac{1}{d} \cdot \ln\left(\frac{p_o}{p_d}\right) \quad I_d = I_o \cdot e^{-2\alpha d} \quad \mu = 2 \cdot \alpha$$

$$\alpha = \alpha_a + \alpha_s$$

---



---

#### S17-S18. Współczynnik rozproszenia

Całkowity energetyczny współczynnik rozproszenia fali ultradźwiękowej w ośrodkach biologicznych to całkowita moc rozproszona przez jednostkową objętość ośrodka, odniesiona do tej objętości i do jednostkowego natężenia fali padającej.

$$\mu_s = a \cdot f^b$$

Energetyczny kierunkowy współczynnik rozproszenia - moc rozproszona przez jednostkową objętość ośrodka w jednostkowy kąt bryłowy dla zadanego kierunku, odniesiona do tej objętości i kąta oraz do jednostkowego natężenia fali padającej. Współczynnik ten określany jest najczęściej dla kierunku przeciwnego  $\mu_{bs}$  lub zgodnego  $\mu_{fs}$  z propagacją fali ultradźwiękowej.

---



---

#### S19. Współczynnik absorpcji

$$\alpha_a = \alpha_v + \alpha_{hc} + \alpha_R$$

$$\alpha_a = \left( \frac{2\pi^2}{\lambda^2 \rho c} \left( \frac{4}{3} \eta + \xi \right) \right) + \left( \frac{2\pi^2 f^2 (\kappa - 1) \cdot k_t}{\rho c^3 c_p} \right) + \left( \sum_j \frac{A_j}{f^2 + f_{Rj}^2} \right)$$

$$\alpha_a = \frac{\omega^2}{2\rho c^3} \left( \frac{4}{3} \eta + \xi + \frac{(\kappa - 1) \cdot k_t}{c_p} \right) + f^2 \sum_j \frac{A_j}{1 + \left( \frac{f}{f_{Rj}} \right)^2}$$

W praktyce, przyrost prędkości dźwięku w obszarze dyspersji związanej z relaksacją molekularną dla ośrodków biologicznych, w zakresie 1 ÷ 10 MHz jest zwykle mniejszy niż 1%.

---



---

#### S20-22. Współczynnik absorpcji tkanek miękkich i wody

$$\alpha_a = \alpha_{a1} \left( \frac{f}{f_1} \right)^n \quad \alpha_a = \alpha_{a1} \left( \frac{f}{f_1} \right)^2$$

$$\alpha \approx 0.0014 \text{ (dB/cm)/MHz}^2 \approx 0.0161 \text{ (Np/m)/MHz}^2$$

---



---

**S23. Średnie wartości tłumienia ultradźwięków w tkankach miękkich**

$\alpha = 0.5 \text{ (dB/cm)/MHz} \approx 5.8 \text{ (Np/m)/MHz}$  – średnia wartość

$\alpha = 0.3 \text{ (dB/cm)/MHz} \approx 3.5 \text{ (Np/m)/MHz}$  – średnia wartość dla tkanek bez tłuszczu

$\alpha = 0.6 \text{ (dB/cm)/MHz} \approx 6.9 \text{ (Np/m)/MHz}$  – średnia wartość dla tkanek z tłuszczem

Wzrost zawartości tłuszczu i kolagenu w tkance powoduje wzrost współczynnika tłumienia.

---



---

**S24. Tłumienie w tkankach twardych (E.Talarczyk – skrypt)**

Zależność tłumienia od częstotliwości jest liniowa w materiałach niekryształicznych (np. szkło, topiony kwarc). W materiałach kryształicznych (np. metale, **kości, zęby**), dla większych częstotliwości zaczyna odgrywać rolę rozproszenie energii na skutek wielokrotnych odbić fali od poszczególnych kryształitów, których wielkość staje się bliska długości fali. Rozproszenie to powoduje gwałtowny wzrost tłumienia.

$$\alpha = \begin{cases} \alpha_a \cdot f + \alpha_s \cdot f^4 & \text{dla } \frac{D_z}{\lambda} < \frac{1}{3}, \quad \alpha_s \sim D_z^3 \\ \alpha_a \cdot f + \alpha_s \cdot f^2 & \text{dla } \frac{D_z}{\lambda} \rightarrow 1 \quad \alpha_s \sim D_z \\ \alpha_a \cdot f + \alpha_s \cdot f^2 & \text{dla } \frac{D_z}{\lambda} > 1 \quad \alpha_s \sim \frac{1}{D_z} \end{cases}$$

W ZĘBACH tłumienie  $8 \div 20 \text{ dB/mm}$  przy  $18 \text{ MHz}$ .

$\alpha_{kości} \approx 4 \div 24 \text{ (dB/cm)/MHz}^2 \approx 46 \div 276 \text{ (Np/m)/MHz}^2$

---



---

**S25. Tłumienie w ośrodkach gazowych**

Obowiązuje ogólny wzór na tłumienie.

Powietrze,  $t = 37^\circ\text{C}$ , wilgotność = 33.5%  $\rightarrow \alpha \approx 1.7 \text{ (dB/cm)/MHz}^2 \approx 19.6 \text{ (Np/m)/MHz}^2$

---



---

**S26-S27. Średnie wartości tłumienia tkanek**

$t = 37^\circ\text{C}, f = 1 \text{ MHz}$

Ośrodek	$\alpha$ [dB/cm]
woda	0.0014
krew	0.2
tłuszcz	0.6
mięśnie	$1.8 \div 3.3$
mózg	0.9
kość gąbczasta	24
kość zbita	4.4
powietrze	1.7

---



---

**S28. Tłumienie fal poprzecznych**

Tkanka	$\alpha_L$ [dB/cm]	$\alpha_L$ [Np/m]	$\alpha_T$ [dB/cm]	$\alpha_T$ [Np/m]
tłuszcz	0.35	4	~10400	1.2·10 <sup>5</sup>
mięsień	1.04	12	~10400	1.2·10 <sup>5</sup>
kość	13.2	152	22.6	260

$f = 1 \text{ MHz}, t = 37 \text{ }^\circ\text{C}$

---



---

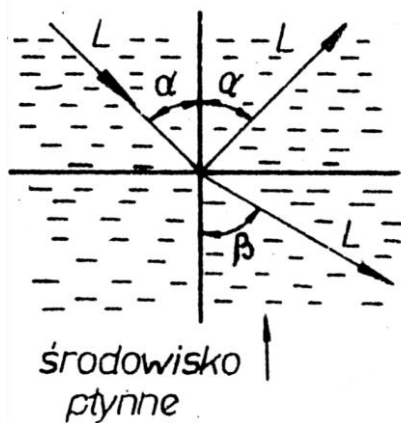
**S29. Ukośne padanie fali ultradźwiękowej na granicę dwóch ośrodków**

- przenikanie
- odbicie
- załamanie
- rozszczepienie

---



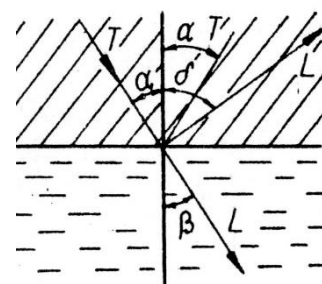
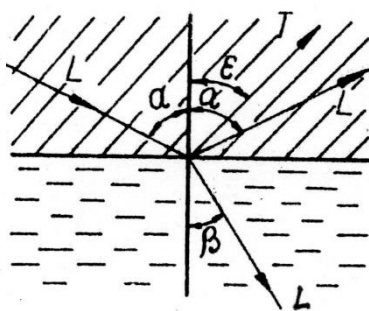
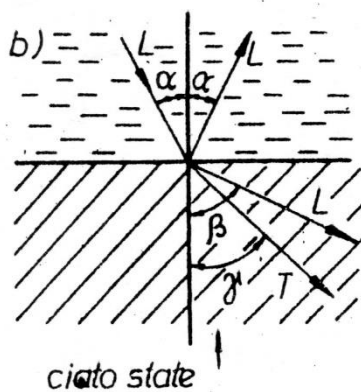
---

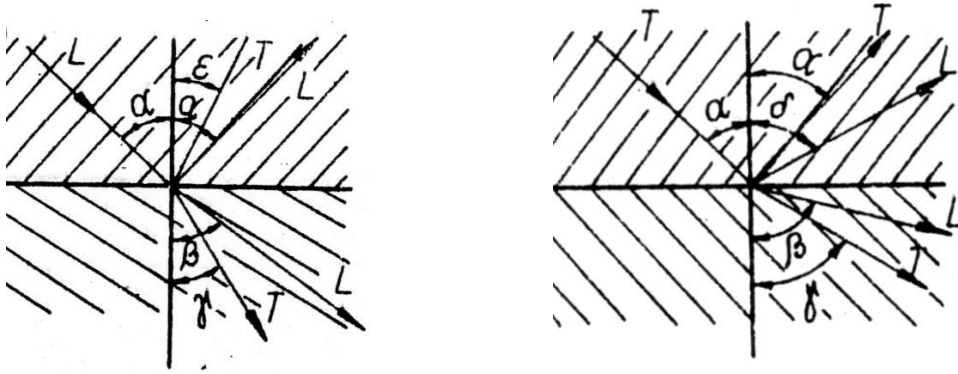
**S30-35. Ukośne padanie fali ultradźwiękowej na granicę dwóch ośrodków**


$$I_r = I_e \frac{\left(1 - m \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}\right)^2}{\left(1 + m \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}\right)^2} \quad \text{gdzie} \quad m = \frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2} = \frac{Z_1}{Z_2}$$

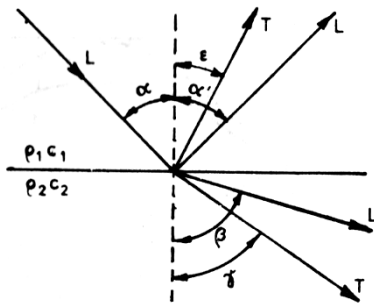
$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c_1}{c_2} \quad R = \frac{I_r}{I_e} \quad D = \frac{I_d}{I_e}$$

$$I_e = I_r + I_d \quad D = 1 - R$$





### S.36-41. Granica dwóch ciał stałych i kąty krytyczne



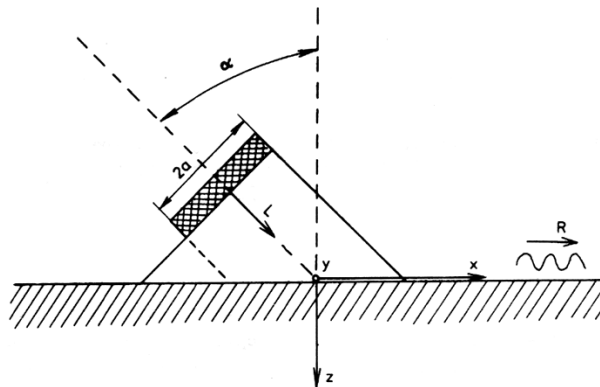
$$\frac{\sin \alpha}{c_{L_1}} = \frac{\sin \beta}{c_{L_2}} = \frac{\sin \gamma}{c_{T_2}} = \frac{\sin \varepsilon}{c_{T_1}}$$

$$\beta = 90^\circ \Rightarrow \sin \alpha_{kr} = \frac{c_{L_1}}{c_{L_2}}$$

$$\gamma = 90^\circ \Rightarrow \sin \alpha_{kr} = \frac{c_{L_1}}{c_{T_2}}$$

Fala powierzchniowa Rayleigha (L i T po powierzchni)  
Maksymalna amplituda fali R, gdy kąt krytyczny 3-ci, czyli  $\alpha_R > \alpha_{kr2}$

$$\sin \alpha_R = \frac{c_{L_1}}{c_R} \quad \frac{c_R}{c_T} = \frac{0.87 + 1.12\sigma}{1 + \sigma}$$

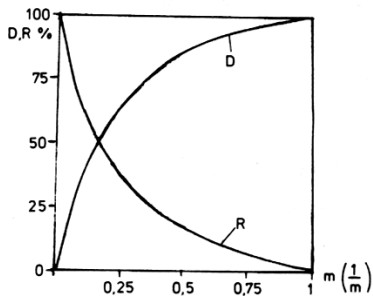


**S.43-S.45. Prostopadłe padanie fali ultradźwiękowej na granicę środowisk**  
Odbicie i przenikanie, energetyczne wsp. przenikania i odbicia

$$I_r = I_e \frac{\left(1 - m \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}\right)^2}{\left(1 + m \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}\right)^2} \quad \text{gdzie} \quad m = \frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2} = \frac{Z_1}{Z_2}$$

Dla  $\alpha = \beta = 0$  ze wzoru wynika, że  $R = \left(\frac{1-m}{1+m}\right)^2$

$$D = 1 - R \quad D = \frac{4m}{(1+m)^2}$$



**S.46-S.47. Prostopadłe padanie fali ultradźwiękowej na granicę środowisk**  
Amplitudowe wsp. przenikania i odbicia

$$p_e = P_e \sin(\omega t - \beta_1 l) = \rho_1 c_1 v_e$$

$$p_r = P_r \sin(\omega t + \beta_1 l) = -\rho_1 c_1 v_r$$

$$p_d = P_d \sin(\omega t - \beta_2 l) = \rho_2 c_2 v_d$$

$$p_d = p_e + p_r \quad v_d = v_e + v_r$$

$$\frac{P_d}{\rho_2 c_2} = \frac{P_e}{\rho_1 c_1} = \frac{P_r}{\rho_1 c_1} \quad P_d = P_e + P_r$$

$R' = \frac{P_r}{P_e} = \frac{1-m}{1+m}$	$R'' = \frac{V_r}{V_e} = -\frac{1-m}{1+m}$
$D' = \frac{P_d}{P_e} = \frac{2}{1+m}$	$D'' = \frac{V_d}{V_e} = \frac{2m}{1+m}$

$$D' = 1 + R'$$

$$D'' = 1 + R''$$

$$R = R' \cdot R''$$

$$D = D' \cdot D''$$

## S.48. Energetyczne współczynniki odbicia fali ultradźwiękowej od granic struktur biologicznych [%]

	WODA	PLEKSI	TŁUSZCZ	MIĘŚNIE	WĄTROBA	NERKA	KREW	SOCZEWKA OKA	MÓZG	KOŚĆ CZASZKI
WODA	----									
PLEKSI	13	----								
TŁUSZCZ	0.5	17.6	----							
MIĘŚNIE	0.4	9.2	1.8	----						
WĄTROBA	0.32	9.5	1.6	0.003	----					
NERKA	0.17	10.4	1.3	0.04	0.002	----				
KREW	0.05	11.5	0.9	0.16	0.11	0.035	----			
SOCZEWKA OKA	0.6	8.4	2.1	0.02	----	----	0.3	----		
MÓZG	0.12	10.7	1.1	0.073	----	----	0.016	----	----	
KOŚĆ CZASZKI	46.5	18.4	51.6	42	----	----	45	----	44	----

$$R = \left( \frac{\rho_2 c_2 - \rho_1 c_1}{\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1} \right)^2$$

$$D = 1 - R$$