

**MATERIAŁY POMOCNICZE DO WYKŁADU
Z PODSTAW ZASTOSOWAŃ ULTRADŹWIĘKÓW W MEDYCYNIE**
(wyłącznie do celów dydaktycznych – zakaz rozpowszechniania)

4. Drgania brył prętów, membran i płyt.

S2. Drgania brył

Każdy układ mechaniczny (**bryła**) wprowadzony do drgań w środowisku sprężystym jest źródłem fali akustycznej.

Bryła o ograniczonych wymiarach:

- nakładanie się fal biegnących i odbitych od granic bryły,
- interferencja tych fal;
- drgania rezonansowe poszczególnych punktów materiałowych bryły,
- oddziaływanie tych punktów wzajemnie na siebie.

Zamocowanie bryły wpływa na ilość liczby swobody układu drgającego.

=====

S3-4. Drgania brył

Każda **bryła** może być traktowana jako układ punktów materialnych połączonych siłami sprężystości. Drgania 1-go punktu wpływają na drgania wszystkich pozostałych.

Drgania **brył** są wynikiem nałożenia się różnych właściwych dla bryły sposobów drgań, które mogą istnieć niezależnie od siebie.

W każdym sposobie drgań wszystkie punkty bryły drgają sinusoidalnie z tą samą częstotliwością

Drgania własne bryły są wynikiem istnienia w bryle fal stojących.

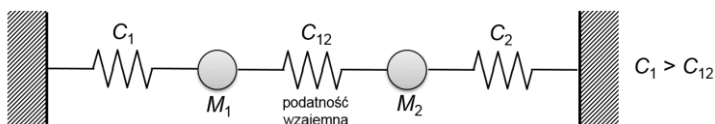
Częstotliwość drgań punktów bryły oraz rozkład węzłów i strzałek **zależą przede wszystkim od kształtu i rozmiarów bryły** oraz od warunków istniejących na jej krańcach, nie zależą one natomiast od sposobu pobudzenia bryły.

=====

S5-8. Układ materialny o dwóch stopniach swobody: drgania własne

Żyszkowski Z., Podstawy elektroakustyki, WNT, Warszawa, 1984

Talarczyk E., Podstawy techniki ultradźwięków, Wrocław, 1990



$$M_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -\frac{1}{C_1} x_1 + \frac{1}{C_{12}} x_2$$

$$M_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -\frac{1}{C_2} x_2 + \frac{1}{C_{12}} x_1$$

Równania ruchu:

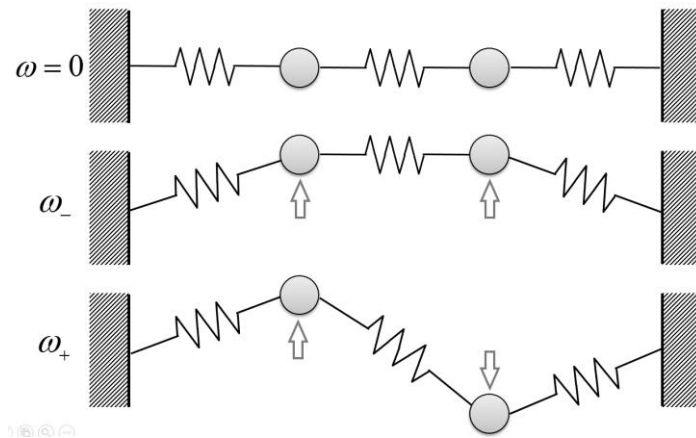
$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \omega_1^2 x_1 - \omega_{12}^2 x_2' = 0 \qquad \frac{d^2 x_2'}{dt^2} + \omega_2^2 x_2' - \omega_{12}^2 x_1 = 0$$

$$\omega_1^2 = \frac{1}{C_1 M_1} \quad \omega_2^2 = \frac{1}{C_2 M_2} \quad \omega_{12}^2 = \frac{1}{C_{12} \sqrt{M_1 M_2}} \quad x_2' = \sqrt{\frac{M_2}{M_1}} x_2$$

Częstotliwość drgań układu:

Powiązanie obydwu punktów materialnych wymusza drgania układu z tą samą częstotliwością.

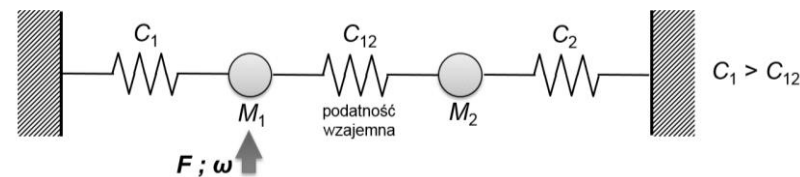
$$\omega = \sqrt{\frac{1}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4\omega_{12}^4}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{C_1 M_1} + \frac{1}{C_2 M_2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{C_1 M_1} - \frac{1}{C_2 M_2}\right)^2 + \frac{4}{C_{12}^2 M_1 M_2}}\right]}$$



S9-10. Układ materialny o dwóch stopniach swobody: drgania wymuszone

Żyszkowski Z., Podstawy elektroakustyki, WNT, Warszawa, 1984

Talarczyk E., Podstawy techniki ultradźwięków, Wrocław, 1990



Równania ruchu:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \omega_1^2 x_1 = \omega_{12}^2 x_2' + F e^{j\omega t} \qquad \frac{d^2 x_2'}{dt^2} + \omega_2^2 x_2' = \omega_{12}^2 x_1$$

$$x = A \cdot e^{j\omega t}$$

$$x_1 = \frac{\omega_2^2 - \omega^2}{(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2) - \omega_{12}^4} F e^{j\omega t} \qquad x_2 = \frac{\omega_{12}^2}{(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2) - \omega_{12}^4} \sqrt{\frac{M_1}{M_2}} F e^{j\omega t}$$

1. Układ pobudzany F wymuszającą o częst. ω po pewnym okresie przejściowym będzie drgać z częstotliwością wymuszającą.
2. Amplituda wychyleń punktów 1 i 2 (wg wzorów) zależy od pulsacji drgań własnych elementu i od częst. wymuszającej.
3. Jeśli $\omega = \omega_+$ lub $\omega = \omega_-$ \rightarrow mianownik we wzorach = 0 $\rightarrow \dot{x}_1$ oraz $\dot{x}_2 = \infty$ (przy pominięciu tarcia).

S11-16. Drgania podłużne prętów

Żyszkowski Z., Podstawy elektroakustyki, WNT, Warszawa, 1984

Talarczyk E., Podstawy techniki ultradźwięków, Wrocław, 1990

Równanie fali podłużnej rozchodzącej się w pręcie:
$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

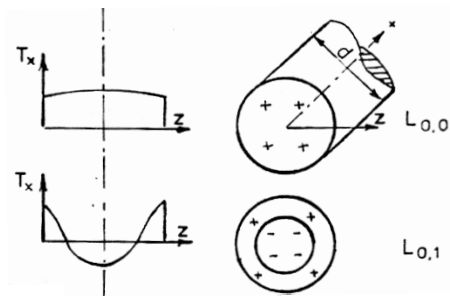
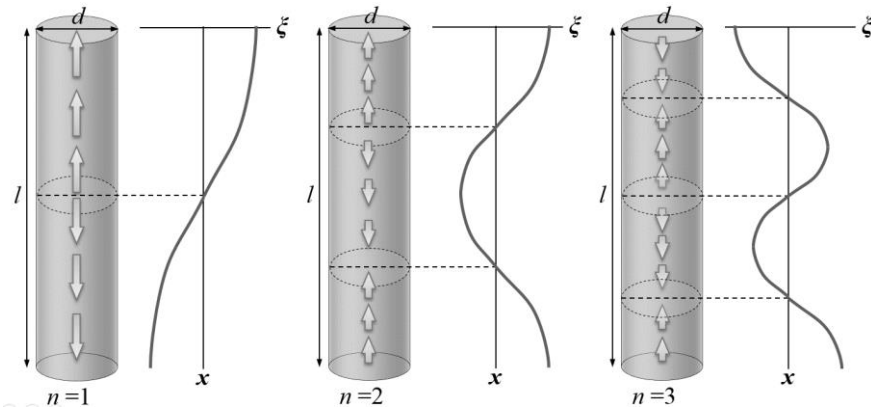
$$\xi = B \cos(\beta x - \psi_1) \cos(\omega t - \psi_2)$$

Dla drgań swobodnych:

- strzałki na końcach pręta ($x = 0$ i $x = l$), czyli ξ_{\max}
- ciśnienie (naprężenie) \sim zgęszczenia \rightarrow na końcach pręta = 0, czyli $d\xi/dx = 0$

$$\frac{d\xi}{dx} = \sin(\beta x - \psi_1) = 0 \quad \beta x = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x = n \cdot \pi \quad \text{dla } n = 0, 1, \dots \quad \text{dla } x = l \quad l = n \cdot \frac{\lambda}{2}$$

$$f_n = \frac{n}{2l} c = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$



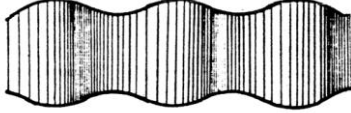
$$c_{L_{0,0}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \cdot \left(1 - \frac{\pi^2 \sigma^2 d^2}{4\lambda^2} \right)$$

$$d/\lambda \rightarrow 0 \quad \text{to} \quad c_0 = \sqrt{E/\rho}$$

Fale podłużne w pręcie gdy $\sigma = 0$



Fale podłużne w pręcie gdy $0 < \sigma < 0.5$



S17. Drgania brył płaskich (membrany, płyty)

Żyszkowski Z., Podstawy elektroakustyki, WNT, Warszawa, 1984

Talarczyk E., Podstawy techniki ultradźwięków, Wrocław, 1990

- Grubość \ll pozostałe wymiary
- Najczęściej stosowane: płyty i membrany okrągłe

Membrana \rightarrow bryła o pomijalnie małej sprężystości własnej w stosunku do sprężystości pochodzącej z jej naciągu.

Płyta \rightarrow sprężystość własna jest czynnikiem decydującym.

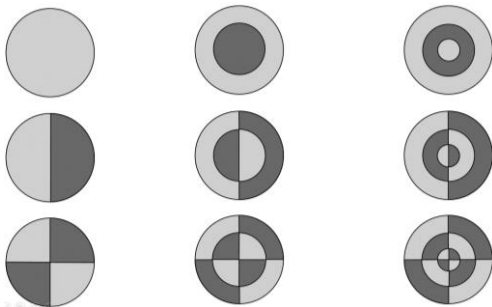
S18-19. Drgania membran

Żyszkowski Z., Podstawy elektroakustyki, WNT, Warszawa, 1984

Talarczyk E., Podstawy techniki ultradźwięków, Wrocław, 1990

$$f_{mn} = \frac{c}{2r_o} \cdot \gamma_{mn} = \frac{1}{2r_o} \sqrt{\frac{T}{\rho_s}} \gamma_{mn} \quad J_m\left(\frac{\omega}{c} r\right) \rightarrow \gamma_{mn} = \frac{x_{mn}}{\pi} \quad \text{oraz} \quad c = \sqrt{T / \rho_s}$$

$m \downarrow$	$n \rightarrow$	1	2	3
0	$\gamma \rightarrow$	0.7655	1.7571	2.7546
	$f \rightarrow$	$0.3827 \cdot (1/r_o) \sqrt{T/\rho_s}$	$2.3 \cdot f_{01}$	$3.6 \cdot f_{01}$
1	$\gamma \rightarrow$	1.2197	2.2330	3.2383
	$f \rightarrow$	$1.59 \cdot f_{01}$	$2.92 \cdot f_{01}$	$4.22 \cdot f_{01}$
2	$\gamma \rightarrow$	1.6347	2.6793	3.6987
	$f \rightarrow$	$2.14 \cdot f_{01}$	$3.50 \cdot f_{01}$	$4.83 \cdot f_{01}$



S20-21. Drgania płyt

Żyszkowski Z., Podstawy elektroakustyki, WNT, Warszawa, 1984

Talarczyk E., Podstawy techniki ultradźwięków, Wrocław, 1990

Płyta → (sprężystość własna jest czynnikiem decydującym):

- sprężystość materiału,
- współczynnik Poissona,
- dwa rodzaje zamocowań – to samo równanie ruchu lecz inne warunki graniczne:

1. Zaciśnięcie na obrzeżu płyty
2. Podparcie na obrzeżu płyty

Dla obydwu sposobów → to samo równanie ruchu ale inne warunki graniczne

$$f_{mn} = \frac{\pi \cdot h \cdot c}{4r_o^2} \cdot \gamma_{mn}^2 = \frac{\pi \cdot h}{4r_o^2} \sqrt{\frac{E}{3\rho(1-\sigma^2)}} \cdot \gamma_{mn}^2 \quad J_m\left(\frac{\omega}{c} r\right) \rightarrow \gamma_{mn} = \frac{x_{mn}}{\pi} \quad \text{oraz} \quad c = \sqrt{\frac{E}{3\rho(1-\sigma^2)}}$$

$$f_{01} = 0.207 \frac{h}{r_o^2} \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\sigma^2)}} \quad f_{02} = 6.55 \cdot f_{01} \quad f_{03} = 16.25 \cdot f_{01}$$

1. Współczynniki γ_{mn} → różne dla obu sposobów mocowania i nie są całkowite.
- 2.
- 3.

S22-24. Drgania powierzchni przetwornika ultradźwiękowego



Przetworniki ultradźwiękowe w większości zastosowań:

Niewielka okrągła lub prostokątna płytka piezoceramiczna o pewnej grubości → **drgania grubościowe**.

Grubość: $\lambda/2$ → fala stojąca zagęszczeń i rozrzedzeń → zmiany grubości płytki względem powierzchni węzłowej przechodzącej przez środek płytki.

$$d = n \cdot \frac{\lambda}{2} = n \cdot \frac{c}{2f_n} \quad \text{dla} \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad f_n = \frac{n}{2d} \cdot c$$